17/10/2017

# Τοπολογικές Ιδιότητες στον $\mathbb{R}^n$

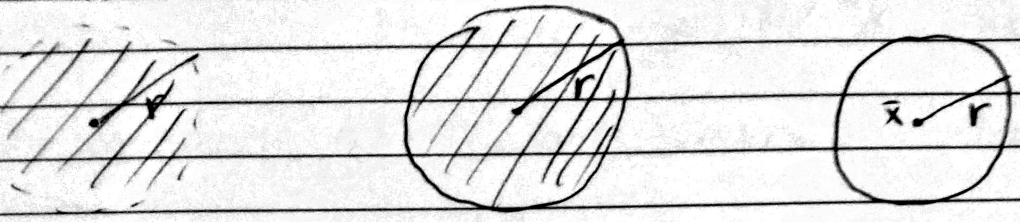
Ορισμός: Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $r>0$. Ονομάζουμε

$B^n(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| < r\}$ ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$

$\bar{B}(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| \le r\}$ κλειστή μπάλα ακτίνας r κέντρου

$S = \partial B(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| = r\}$ σφαίρα ακτίνας r κέντρου $\bar{x}$.

Για n=2



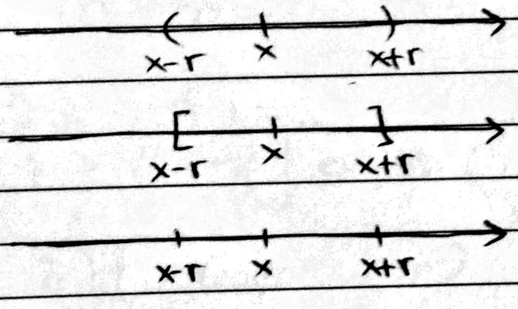

Για n=2 λέμε και ανοικτός κλειστός δίσκος και κύκλος.

Για n=1 έχουμε αντίστοιχα ανοικτό διάστημα $(x_0-r, x_0+r)$

κλειστό -״- $[x_0-r, x_0+r]$

το σύνολο $\{x-r, x+r\}$.

$\boxed{n=1}$




(αυτό προκύπτει από το ότι το σύνολο $\{x-r, x+r\}$ για $\bar{x} \in \mathbb{R}^1$, $\bar{x} \equiv (x) \iff x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\|\bar{x}\| = |x|$

$$\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \underset{n=1}{=} (x^2)^{1/2} = |x| \Big).$$

Ορισμός $U \subseteq \mathbb{R}^n$ α) ανοικτό $\iff \forall \bar{x} \in U\ \exists\ \varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon) \subset U$

β) κλειστό $\iff \mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό

Πρόταση: Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

Πρόταση/Άσκηση: Κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο

Απόδειξη/Λύση:

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$

$\bar{B}(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{y}-\bar{x}\| \le r\}$

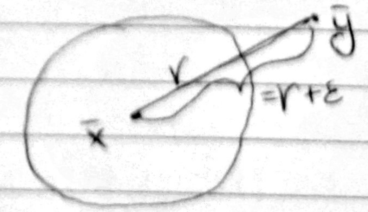
Θ.ν.ο. $\underbrace{\{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{y}-\bar{x}\| > r\}}_{\text{σύνολο}}$ ανοικτό

Δηλαδή, Θ.ν.δ.ο. αν $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ έχει την ιδιότητα $\|\bar{y}-\bar{x}\| > r$

$\iff \|\bar{y}-\bar{x}\| = r+\varepsilon,\ \varepsilon>0$

τότε $\exists\, \varepsilon>0 \quad B(\bar y,\varepsilon) \subset \{\underset{\bar z}{\cancel{\bar y}} \in \mathbb{R}^n : \|\underset{\bar z}{\cancel{\bar y}} - \bar x\| > r\}$

$\|\bar z - \bar y\| < \varepsilon$ τότε $\|\bar z - \bar x\| > r$




Αν επιλέξω $\varepsilon>0$, τέτοιο ώστε $\|\bar y - \bar x\| = r+\varepsilon$, τότε έχουμε

$$\|\bar z - \bar x\| \geq \underbrace{\|\bar y - \bar x\|}_{=r+\varepsilon} \underbrace{- \underbrace{\|\bar z - \bar y\|}_{<\varepsilon}}_{>-\varepsilon} > r+\varepsilon-\varepsilon = r$$

<u>Πρόταση</u>

Η ένωση οσοδήποτε πολλών ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο και η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών είναι ανοικτό.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $U_i, \ldots$ $i\in I$ (οικογένεια δεικτών) ανοικτά

Θ.ν.δ.ο. $\bigcup_{i\in I} U_i$ είναι ανοικτό, δηλαδή Θ.ν.δ.ο. αν

$\underbrace{\bar x \in \bigcup_{i\in I} U_i}$, τότε $\exists\, \varepsilon>0 \quad B(\bar x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

$\Rightarrow \exists\, i_0 \in I \quad \bar x \in U_{i_0} \xRightarrow[U_{i_0} \text{ ανοικτό}]{} \exists\, \varepsilon>0 \quad B(\bar x,\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

Έστω $U_i = 1 \ldots n$ $U_i$ ανοικτά

Θ.ν.δ.ο. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ ανοικτό, δηλ. Θ.ν.δ.ο. $\underbrace{\bar x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i} \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$

$B(\bar x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

$\Rightarrow \forall\, i=1\ldots n$

$\bar x \in U_i \xRightarrow[U_i \text{ ανοικτό}]{} \exists\, \varepsilon_i>0$

$B(\bar x,\varepsilon_i) \subset U_i$

$\Longrightarrow$ επιλέγω ως $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \varepsilon_i > 0 \Longrightarrow$

$B(\bar x,\varepsilon) \subset B(\bar x,\varepsilon_i) \quad \forall\, i=1,\ldots,n \Longrightarrow B(\bar x,\varepsilon) \subset U_i \quad \forall\, i=1,\ldots,n$

$\Longrightarrow B(\bar x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

<u>Παρατήρηση</u> Αν έχουμε μια τομή απείρων το πλήθος ανοικτών συνόλων, τότε αυτή (η τομή) δεν είναι απαραίτητα ανοικτή.
<u>Αντιπαράδειγμα</u> Έστω τα σύνολα $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = ;$ το οποίο δεν είναι ανοικτό

$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \supset \{0\}$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \{0\}$ (απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ με $x \neq 0$
$\Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} < |x|$ (Αρχιμήδεια Ιδ.) $\Longrightarrow$
$x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

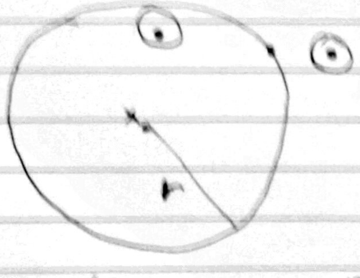
Το $\{0\} \subset \mathbb{R}$ δεν είναι ανοικτό αφού $\forall\, \varepsilon > 0$ $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \{0\}$.)

<u>Παρατήρηση</u> Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται ότι είναι και ανοιχτά και κλειστά σύνολα.
Επίσης, η οικογένεια όλων των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ ορίζει μία τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ για την οποία θα πρέπει να ισχύει η προηγούμενη πρόταση.
<u>Πρόταση/Άσκηση</u> Η τομή μιας οικογένειας κλειστών συνόλων (οσοδήποτε πολλών) είναι κλειστό σύνολο και η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών είναι κλειστό σύνολο).
π.χ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}[0, n]$ ή (καλύτερα) π.χ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] =$
$(-1, 1)$
<u>Ορισμός</u> Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται
α) φραγμένο, αν $\exists\, R > 0$ $U \subset B(\bar{0}, R) \Longleftrightarrow \exists\, R > 0$ $\forall\, \bar{x} \in U$ $\|\bar{x}\| < R$
β) συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο
<u>Παρατήρηση</u> Ο ορισμός αυτός της συμπάγειας ταυτίζεται στον $\mathbb{R}^n$ με τον συνήθη (τοπολογικό) ορισμό.

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Το $\bar{x}$ ονομάζεται
(α) εσωτερικό σημείο του $U$, αν $\exists\ \varepsilon > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
(β) εξωτερικό σημείο του $U$, αν είναι εσ. σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus U$
(γ) συνοριακό σημείο του $U$, αν δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό.

Παρατήρηση: Κάθε $U \subset \mathbb{R}^n$ χωρίζει το $\mathbb{R}^n$ σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα $\mathbb{R}^n = \text{int}U \cup \text{ext}U \cup \text{bd}U$
όπου $\text{int}U$ = το σύνολο των εσωτερικών σημείων του $U$.
$\text{ext}U$ = το σύνολο των εξωτερικών σημείων του $U$.
$\text{bd}U$ = το σύνολο των συνοριακών σημείων του $U = \partial U$

Προσοχή: Ένα συνοριακό σημείο μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο $U$. π.χ. η ανοιχτή μπάλα και η κλειστή μπάλα έχουν και οι δύο ως σύνορο την σφαίρα δηλαδή
$$\underbrace{\partial B(\bar{x}, r)}_{\text{σφαίρα}} = \partial \bar{B}(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{y} - \bar{x}\| = r\}$$




Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$
Τότε
α) $\text{int}\,U \subset U$
β) $\text{int}U$ ανοικτό
γ) $U$ ανοικτό $\iff \text{int}U = U$
δ) $U \subset V \subset \mathbb{R}^n \implies \text{int}U \subset \text{int}V$
ε) $\text{ext}U = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \subset \overline{U}$

Απόδειξη
α) $x \in \text{int}U \implies \exists\ \varepsilon > 0$ $\bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
β) Έστω $\boxed{\bar{x} \in \text{int}U} \overset{\text{ορ.}}{\implies} \boxed{\exists\ \varepsilon > 0}$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
όμως $B(\bar{x}, \varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \overset{\text{ορ}}{\iff}$
$\forall\ \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ $\exists\ \varepsilon(\bar{y}) > 0$ $B(\bar{y}, \varepsilon(\bar{y})) \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \implies$
$\forall\ \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ $\exists\ B(\bar{y}, \varepsilon(\bar{y})) \subset U \implies$
$\forall\ \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ $\bar{y} \in \text{int}U \implies \boxed{B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \text{int}U}$

γ) $\Rightarrow$ Από το (α) μένει να δείξουμε ότι αν $U$ ανοικτό τότε $U \subset \text{int}\, U$:

Έστω $\bar{x} \in U$ ~~...~~ $\xrightarrow{U \text{ ανοικτό}} \exists\, \varepsilon > 0 \;\; B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \underset{\text{ορ.}}{\Longrightarrow}$

$\bar{x} \in \text{int}\, U$.